

## ЛЕКЦІЯ №7. АВТОХВИЛІ У ФІЗИЧНИХ, ХІМІЧНИХ ТА БІОЛОГІЧНИХ СИСТЕМАХ

### 7.1. Біжучі фронти

При поширенні біжучого фронту (хвилі перемикання) стан середовища є різним перед фронтом і після фронту. Типовий приклад – поширення полум'я вздовж стежки, посипаної порохом.

Розглянемо рух біжучого фронту в системі, яка описується однією динамічною змінною. Нехай автохвиля поширюється вздовж осі  $OZ$ . Тоді рівняння для динамічної змінної (5.1) (системи одиниць вибираємо так, щоб  $D=1$ ) має вигляд

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + f(X), \quad (7.1)$$

де  $f(X)$  – нелінійна функція аргументу.

Нехай в однорідному стаціонарному випадку ( $X = \text{const}$ ) рівняння (7.1) має особливі точки при  $X = X^{(s)}$ , при цьому  $f(X^{(s)}) = 0$ . На нескінченності система є однорідною і, отже, знаходиться в одній з особливих точок, тобто  $X = X^{(s)}$  при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Для хвиль перемикання особливі точки, в яких знаходиться система при  $z \rightarrow -\infty$  і  $z \rightarrow +\infty$ , є різними.

Введемо автохвильову змінну

$$\xi = z - Vt, \quad (7.2)$$

яка описує хвильові процеси, і будемо вважати, що  $X(z, t)$  залежить від  $\xi$ , тобто  $X(z, t) = X(\xi)$ . Розв'язки з такою залежністю динамічної змінної від аргументів є окремими розв'язками рівняння (7.1), що саме описують хвильові процеси. Якщо аргументи  $z$  і  $t$  входять у розв'язок у співвідношенні (7.2), то такий розв'язок описує процес, в якому певне значення аргументу зміщується в просторі зі швидкістю  $V$ . Після підстановки (7.2) у рівняння (7.1) дістанемо

$$\frac{d^2 X}{d\xi^2} + V \frac{dX}{d\xi} + f(X) = 0. \quad (7.3)$$

Введемо позначення  $X_1 = X$ ,  $X_2 = \frac{dX}{d\xi}$ .

Тоді для визначення  $X_1$  і  $X_2$  одержимо таку систему двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{d\xi} &= X_2, \\ \frac{dX_2}{d\xi} &= -VX_2 - f(X_1). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Аналізуючи систему (7.4), можна використати методи, які викладені в розділі 1 для дослідження динаміки системи, зробивши заміну  $\xi$  на  $t$ .

З (7.4) випливає рівняння для фазових траєкторій

$$X_2 \frac{dX_2}{dX_1} + VX_2 + f(X_1) = 0. \quad (7.5)$$

Скінченність величин  $X_1$  і  $X_2$ , вимагає, щоб фазові траєкторії не прямували на нескінченність. Оскільки при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  система знаходиться в однорідному стаціонарному стані, то фазові траєкторії повинні бути проведені з однієї особливої точки в іншу. Такі траєкторії називаються гомоклінічними. Траєкторії, які проходять між особливими точками, називаються гетероклінічними.

Особливі точки системи (7.4) визначаються із співвідношень  $X_2^{(s)} = 0$ ,  $f(X_1^{(s)}) = 0$ . Для дослідження розв'язку  $X_i(\xi)$  поблизу  $s$ -ої особливої точки покладемо

$$X_1 - X_1^{(s)} = x_1^{(s)} e^{k\xi} \quad X_2 = x_2^{(s)} e^{k\xi}. \quad (7.6)$$

Величина  $k$  еквівалентна декременту згасання розділу 1.

Аналізуючи систему (7.4) при малих відхиленнях  $X_1^{(s)}$  і  $X_2^{(s)}$  отримаємо значення  $k$

$$k = \frac{1}{2} \left( -V \pm \sqrt{V^2 - 4f'(X_1^{(s)})} \right). \quad (7.7)$$

Припустимо, що функція  $f(X_1)$  має вигляд, наведений на рис. 7.1 (крива 1). Особливими є точки  $X_1^{(1)}$  і  $X_1^{(3)}$ . У точці  $X_1 = X_1^{(1)}$  маємо  $f'(X_1^{(1)}) > 0$  і тому при  $V \neq 0$  особлива точка є або вузлом, або фокусом, а в

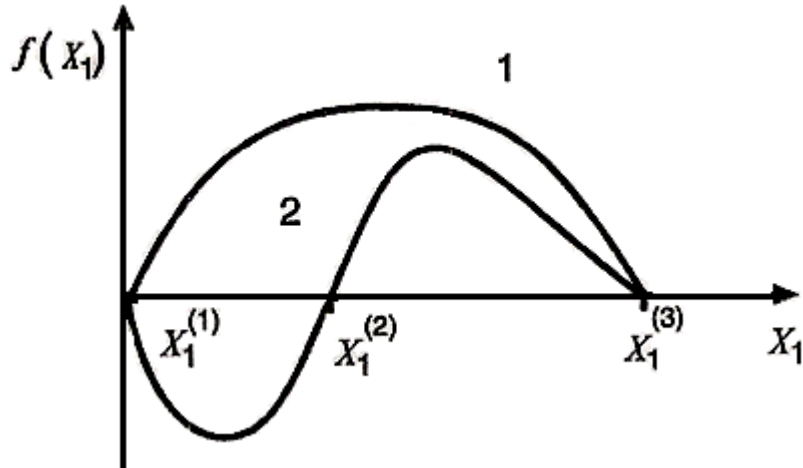


Рис. 7.1. Типи досліджуваних нелінійних функцій

точці  $X_1 = X_1^{(3)}$   $f'(X_1^{(3)}) < 0$  і особлива точка є сідлом. Можливі фазові траєкторії розв'язків рівняння (7.5) для функції  $f(X_1)$ , яка задана кривою 1 рис.7.1, зображені на рис. 7.2, а. Стрілочки вказують напрямок руху точки на траєкторії при збільшенні  $\xi$ . Так, при  $X_2 < 0$  згідно з (7.4)  $dX_1/d\xi < 0$  і значення  $X_1$  зменшується із зростанням  $\xi$ . Траєкторія, яка задовольняє граничним умовам і умові скінченності значень динамічних змінних, повинна бути проведена з точки  $X_1^{(3)}$  (сідла) в точку  $X_1^{(1)}$  (вузол або фокус). Дослідження на стійкість, яке буде наведене нижче, показує, що траєкторії, які проведені у фокус, є нестійкими. Тому стійкими можуть бути траєкторії в тому разі, коли точка  $X_1^{(1)}$  є вузлом, що має місце за умови  $V > V_{\min} = 2\sqrt{f'(X_1^{(s)})}$ .

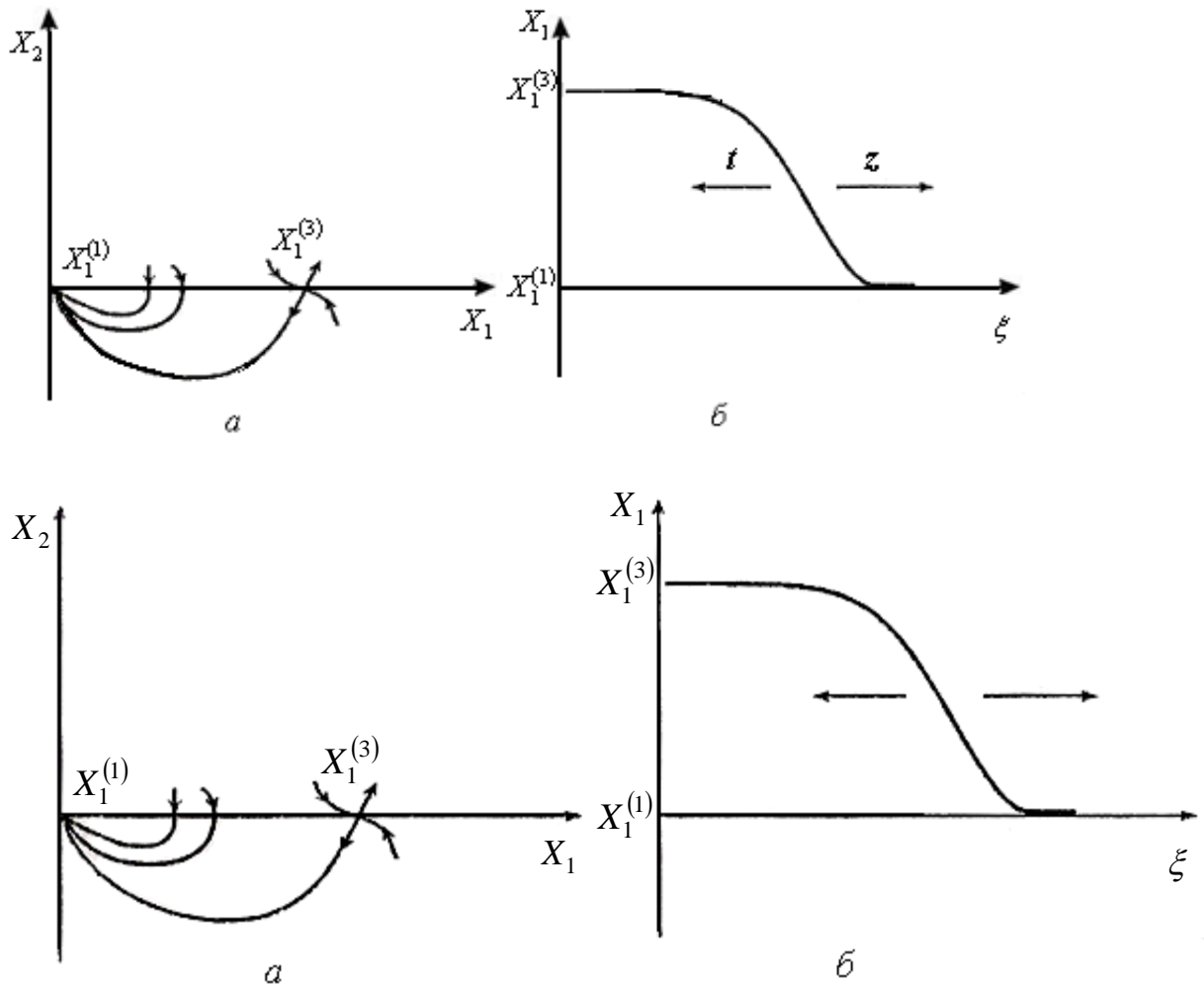


Рис. 7.2. Фазові траєкторії для системи рівнянь (7.4) з нелінійною функцією 1 (див. рис. 7.1) (а); залежність від координати динамічної змінної (б)

Отже, біжучі хвилі можуть поширюватися лише при швидкостях, більших за  $V_{\min}$ . На рис. 7.2, б зображена залежність змінної  $X_1$  від координати  $\xi$ . Стрілочками в одному і в протилежному напрямках вказані напрямки зміщення кривої при зміні  $z$  і  $t$  відповідно.

Розглянемо автохвилі, котрі описуються рівнянням (7.1) з функцією  $f(X)$ , яка задається на рис. 7.1 кривою 2. Дослідження, подібні до проведених вище, показують, що в даному випадку існують три стаціонарні точки, в яких  $X_2^{(s)} = 0, X_1^{(s)} = X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, X_1^{(3)}$ , при цьому  $X_1^{(1)}$  і  $X_1^{(3)}$  є стійкими стосовно малих флуктуацій, а  $X_1^{(2)}$  є нестійкою. Фазові траєкторії, що описують автохвилі в розглядуваному випадку для значень швидкостей  $V = 0$  і  $V \neq 0$ , представлені

на рис. 7.3. На рисунку також для гомоклінічних траєкторій дано просторові залежності  $X_1(\xi)$ , які пронумеровані так само, як і фазові траєкторії.

Проаналізуємо стійкість окремих розв'язків стосовно малих флуктуацій. Представимо динамічну змінну при малих відхиленнях від автохвильового розв'язку у вигляді

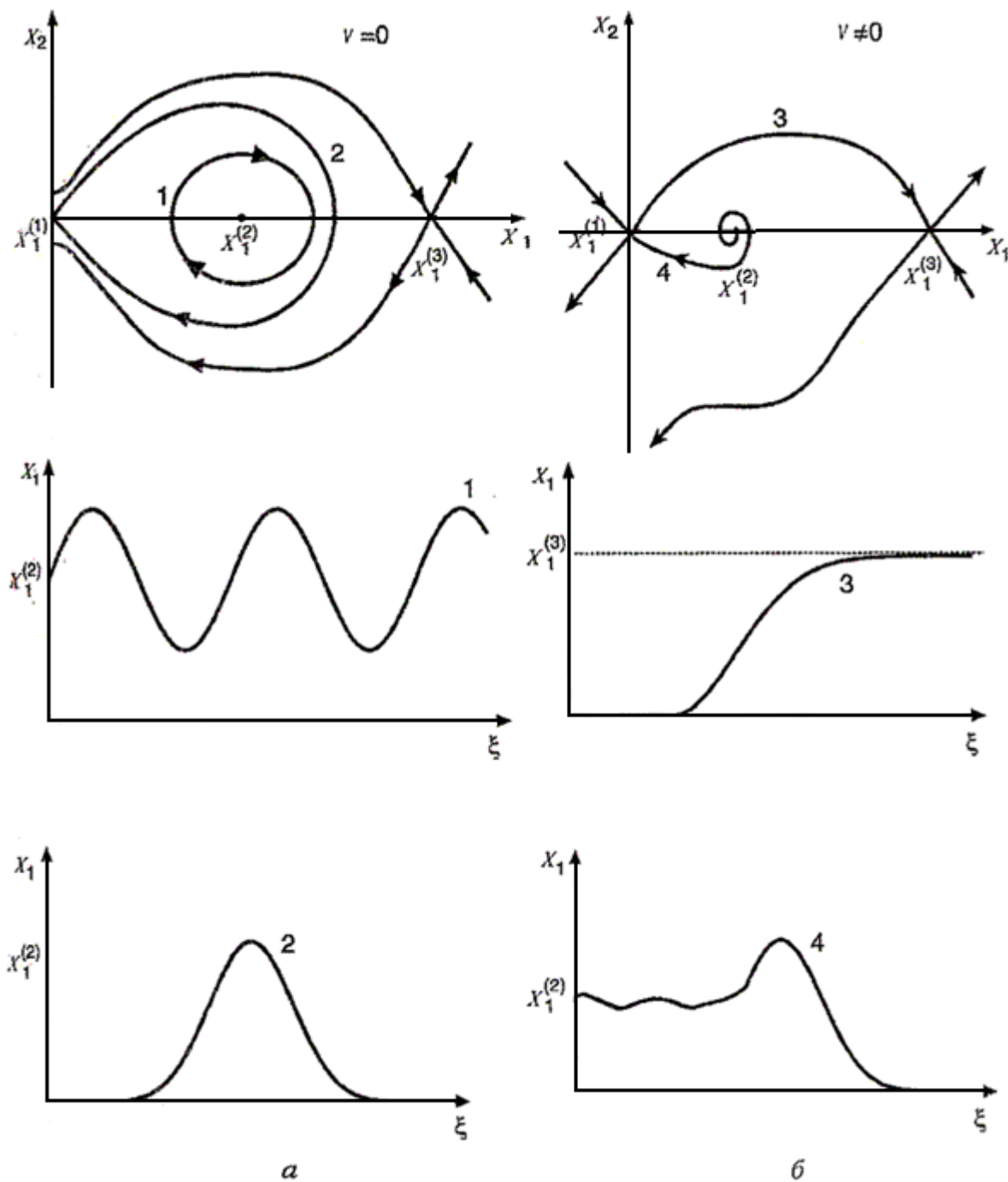


Рис. 7.3. Фазові траєкторії і координатна залежність динамічних змінних системи рівнянь (7.4) з нелінійною функцією 2 (див. рис. 7.1)

$$X(z, t) = X(\xi) + \sum_v a_v e^{p_v t} \psi_v(\xi), \quad (7.8)$$

де  $X(\xi)$  є розв'язком рівняння (7.3);  $a_v$  – малі величини, значення яких визначаються значеннями відхилень розв'язку від автохвильового в початковий момент часу; функція  $\psi_v$  задовольняє рівнянню

$$\frac{d^2 \psi_v}{d\xi^2} + V \frac{d\psi_v}{d\xi} + \frac{df}{dX} \psi_v = p_v \psi_v, \quad (7.9)$$

де  $p_v$  – власні значення розв'язків рівняння (7.9), індекс  $v$  нумерує ці розв'язки.

Аналіз стійкості можна виконати так само, як це було зроблено в підрозділі 5.1, використавши подібність рівняння (7.9) до рівняння Шредінгера з енергією  $E_v = -p_v$  і відповідні теореми про число нулів функції.

Безпосередньою підстановкою можна показати, що одним з розв'язків цього рівняння є функція

$$\psi_v = \frac{dX(\xi)}{d\xi} \quad (7.10)$$

при  $p_v = 0$ .

Отже, один з розв'язків рівняння (7.9) нам відомий. Його власне значення  $p_v = 0$ .

Якщо він відповідає найвищому значенню  $p$ , то власні значення всіх інших розв'язків є від'ємними і згідно з (7.8) розв'язок  $X(\xi)$  є стійким. Якщо розв'язок (7.10) відповідає не найнижчому значенню  $p$ , то він є нестійким. Розв'язок (7.10) відповідає найменшому значенню  $p$ , якщо функція  $dX/d\xi$  не має нулів (див., наприклад, [71]). Тому, якщо функція  $\psi = dX/d\xi$  не змінює знака при зміні  $\xi$ , то розв'язок  $X(\xi)$  є стійким (за винятком трансляційного зсуву, якщо середовище є нескінченним). Якщо функція  $dX/d\xi$  у деяких точках дорівнює нулю, то  $X(\xi)$  є нестійким розв'язком рівняння (7.1). Як

впливає з рис. 7.3, єдиним стійким розв'язком є такий, для якого фазова траєкторія є сепаратрисою, що проведена з однієї сідлової точки до іншої (крива 3 на рис. 7.3). При цьому швидкість  $V$  має певне значення, яке визначається функцією  $f(X)$ .

## **7.2. Автохвилі фазового переходу**

Для прикладу аналітичного розв'язку рівняння (7.1) у вигляді автохвиль розглянемо автохвилю фазового переходу, а саме – динаміку системи, в якій відбувається фазовий перехід з одного стану в інший.

Проаналізуємо докладніше деякі властивості рівноважних фазових станів, про які йшлося в розділі 2. У системах, що мають фазовий перехід першого роду, існує область температур  $T_1 < T < T_2$ , де можливе існування двох фаз. При цьому в області температур  $T_1 < T < T_c$  одна фаза (наприклад фаза 1), знаходиться в стабільному стані, а інша фаза (фаза 2) – у метастабільному стані. В області температур  $T_c < T < T_2$ , навпаки, фаза 1 є метастабільною, а фаза 2 – стабільною. При  $T = T_c$  в системі можливе співіснування обох фаз, температура  $T_c$  називається температурою фазового переходу. Метастабільна фаза може існувати надзвичайно довго. Перехід у стабільну фазу відбувається внаслідок флуктуаційних процесів в метастабільній фазі, які приводять до виникнення зародків стабільної фази. Якщо розміри зародку перевищують певне критичне значення, зародок зростає і зрештою система переходить в стан зі стабільною фазою. Зростання зародку може бути описане рухом автохвилі фазового переходу. Здебільшого зародки, що виникають, мають сферичну форму. Проте при стимульованому створенні зародку, наприклад на плоскій границі, він може мати плоску форму. Тоді процес фазового переходу з метастабільної фази в стабільну є рух автохвилі, внаслідок якого метастабільна область зменшується, а область стабільної фази зростає. Така автохвиля є біжучим фронтом, який наведено в попередньому підрозділі. У цьому підрозділі поширення фронту буде розглянуто докладніше в моделі фазових переходів Ландау.

Отже, стан системи характеризується параметром порядку (підрозділ 2.4). Для одноманітності будемо позначати параметр порядку через  $X$  (замість  $\eta$  у підрозділі 2.4). У просторово-неоднорідній нестационарній системі параметр порядку є функцією координат і часу ( $X \equiv X(r, t)$ ). У просторово-неоднорідній системі рівняння Ландау–Халатнікова (2.47) переходить у функціональне рівняння типу (4.2)

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\Gamma \frac{\delta \Phi_h(X(r, t))}{\delta X(r, t)}, \quad (7.11)$$

де  $\Phi_h$  – повний термодинамічний потенціал, який визначається інтегралом

$$\Phi_h = \int \left[ \Phi_0 + \frac{1}{2} g (\vec{\nabla} X)^2 + qX + \frac{a}{2} X^2 + \frac{r}{3} X^3 + \frac{b}{4} X^4 + \frac{d}{5} X^5 + \frac{c}{6} X^6 \right] d\mathbf{r}. \quad (7.12)$$

Коефіцієнт  $a$  розкладається в ряд за степенями  $T - T_0$ , де  $T_0$  – певна температура, яка у випадку фазових переходів 2-го роду є температурою фазового переходу (див. рис. 2.49). Коефіцієнти  $q, r, b, d, c$  вважають незалежними від температури. Лінійний стосовно  $X$  член часто відкидається внаслідок вибору точки відліку параметра порядку так, щоб у точці фазового переходу один з мінімумів термодинамічного потенціалу реалізувався при  $X = 0$ . Проте для загальності результатів, зокрема, для вивчення динаміки фазових переходів у зовнішніх полях, ми залишимо цей член. Доданок  $\frac{1}{2} g (\vec{\nabla} X)^2$  описує енергію, необхідну для створення неоднорідності. Оскільки при виникненні неоднорідності вільна енергія зростає, то  $g > 0$ .

Підставивши (7.12) у (7.11), отримаємо рівняння для параметра порядку (7.1)

$$\frac{\partial X}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial^2 X}{\partial \tilde{z}^2} + f(X), \quad (7.13)$$

де

$$\tilde{t} = \frac{t}{r}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{g^{1/2}}, \quad f(X) = -\left(q + aX + rX^2 + bX^3 + dX^4 + cX^5\right) \quad (7.14)$$



Автохвильові розв'язки рівняння (7.13) описуються рівнянням (7.3), в якому  $\xi = \tilde{z} - \tilde{t}/V$ .

Для описування фазових переходів другого роду потрібно покласти  $q = r = d = c = 0, b > 0$ . Проте при фазових переходах другого роду немає двох стійких станів при одній і тій же температурі (див. підрозділ 2.4) і відсутні процеси з рухом границі розділу фаз. Тому ми вивчатимемо динаміку фазових переходів першого роду. Розглянемо дві моделі.

### 7.2.1. Несиметричний потенціал

Для несиметричного потенціалу стани з параметрами порядку  $X$  і  $-X$  нееквівалентні. Для опису фазових переходів досить в (7.14) врахувати доданки з коефіцієнтами  $q, r, b$ , поклавши коефіцієнти перед вищими степенями  $X$ , рівними нулю, тобто  $d = c = 0$ . У цьому разі функцію  $f(X)$  можна представити у вигляді

$$f(X) = -b(X - X^{(1)})(X - X^{(2)})(X - X^{(3)}). \quad (7.15)$$

Значення  $X^{(s)} (s = 1, 2, 3)$  є особливими точками, що визначаються з умови

$$q + aX + rX^2 + bX^3 = 0 \quad (7.16)$$

Величини  $X^{(s)}$  залежать від температури. Вигляд функції (7.15) такий самий, який має функція 2 на рис. 7.1. Точки  $X^{(1)}$  і  $X^{(3)}$  є стабільними точками рівняння (7.13) в однорідному випадку. Вони визначають параметри порядку в стабільній і метастабільній фазах в однорідному випадку. Обравши функцію  $f(X)$  у вигляді (7.15) ми розв'яжемо задачу про рух автохвилі аналітично і підтвердимо результати, одержані в підрозділі 7.1 якісно. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що при функції  $f(X)$  у вигляді (7.15) розв'язок рівняння (7.3) задовольняє умові

$$\frac{dX}{d\xi} = A(X - X^{(1)})(X - X^{(3)}), \quad (7.17)$$

де

$$A = \pm \left( \frac{B}{2} \right)^{1/2}, \quad (7.18)$$

$$V = A(X^{(1)} + X^{(3)} - 2X^{(2)}). \quad (7.19)$$

Після інтегрування (7.15) з граничними умовами  $X = X^{(1)}$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  і  $X = X^{(3)}$  при  $\xi \rightarrow \infty$  дістанемо

$$X = \frac{X^{(1)} + X^{(3)} \exp \left[ \left( \frac{b}{2} \right)^{1/2} (X^{(3)} - X^{(1)}) \xi \right]}{1 + \exp \left[ \left( \frac{b}{2} \right)^{1/2} (X^{(3)} - X^{(1)}) \xi \right]}. \quad (7.20)$$

При іншому розміщенні фаз на нескінченності ( $X = X^{(3)}$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  і  $X = X^{(1)}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ ) розв'язок описується формулою (7.20), в якій у величині  $A$  (7.18) вибирається знак  $(-)$ , і, отже, швидкість змінює знак. Таким чином, знак у розв'язку (7.18) і, отже, напрямок швидкості визначаються граничними умовами; рух автохвилі відбувається таким чином, що розміри стабільної фази збільшуються за рахунок розмірів метастабільної. Цей результат відрізняється від хвильового процесу в лінійному середовищі, в якому рух хвилі можна збудити у будь-якому напрямку. Як уже зазначалось, значення особливих точок  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$  залежать від температури. При температурі фазового переходу ( $T = T_c$ ) виконується умова  $X^{(1)} + X^{(3)} - 2X = 0$ , швидкість автохвилі згідно з (7.19) дорівнює нулю. В цьому випадку границя розділу є нерухома і можливе співіснування двох фаз. При  $T < T_c$  і  $T > T_c$  напрямки руху автохвилі протилежні при однаковому розміщенні фаз на нескінченності. Це відбувається внаслідок зміни характеру стабільності фаз на нескінченності (стабільна фаза

стає метастабільною і, навпаки, метастабільна – стабільною ) при підвищенні температури від  $T < T_c$  до  $T > T_c$ .

### 7.2.2. Симетричний потенціал

Для симетричного потенціалу стани з параметром порядку  $X$  і  $-X$  є еквівалентними; У цьому разі термодинамічний потенціал  $\Phi$  є парною функцією  $X$ , отже,  $f(X)$  є антисиметричною функцією, яка має вигляд

$$f(X) = -(aX + bX^3 + cX^5). \quad (7.21)$$

Проаналізуємо кількість і характер особливих точок, поклавши згідно з теорією Ландау  $a = \alpha(T - T_1)$ . Усі інші коефіцієнти вважатимемо незалежними від температури.

При  $T < T_1$  особливими точками є точки  $X^{(1)}, X^{(3)}, X^{(5)}$ , де

$$X^{(1)} = -X^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{b}{c} + \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{4\alpha(T - T_1)}{c} \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (7.22)$$

$$X^{(5)} = 0.$$

У точках  $X = \pm X^{(1)}$  термодинамічний потенціал має мінімум, у точці  $X^{(5)}$  – максимум. Якщо не брати до уваги знак параметра порядку (тобто вважати, що стани  $X^{(1)}$  і  $-X^{(1)}$  описують однакову фазу), то при  $T < T_1$  існує тільки одна фаза.

В області температур

$$T_1 < T < T_2 = T_1 + \frac{b^2}{4\alpha} \quad (7.23)$$

є п'ять особливих точок. До особливих точок (7.22) додаються нестійкі точки  $X^{(2)}$  і  $X^{(4)}$

$$X^{(2)} = -X^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{b}{c} - \left( \frac{b^2}{c^2} - \frac{4\alpha(T-T_1)}{c} \right)^{1/2} \right]^{1/2}. \quad (7.24)$$

Крім того, при температурах  $T > T_1$ , особлива точка  $X^{(5)}$  стає стійкою. Тому в області температур, що задовольняють умові (7.23), існують три стійких стани і дві фази: одна з параметром порядку  $X = \pm X^{(1)}$  і друга з параметром порядку  $X^{(5)} = 0$ .

При  $T > T_2$  реалізується тільки один стан з параметром порядку  $X = X^{(5)} = 0$ . Залежність термодинамічного потенціалу від параметра порядку при різних температурах схематично представлена на рис. 7.4.

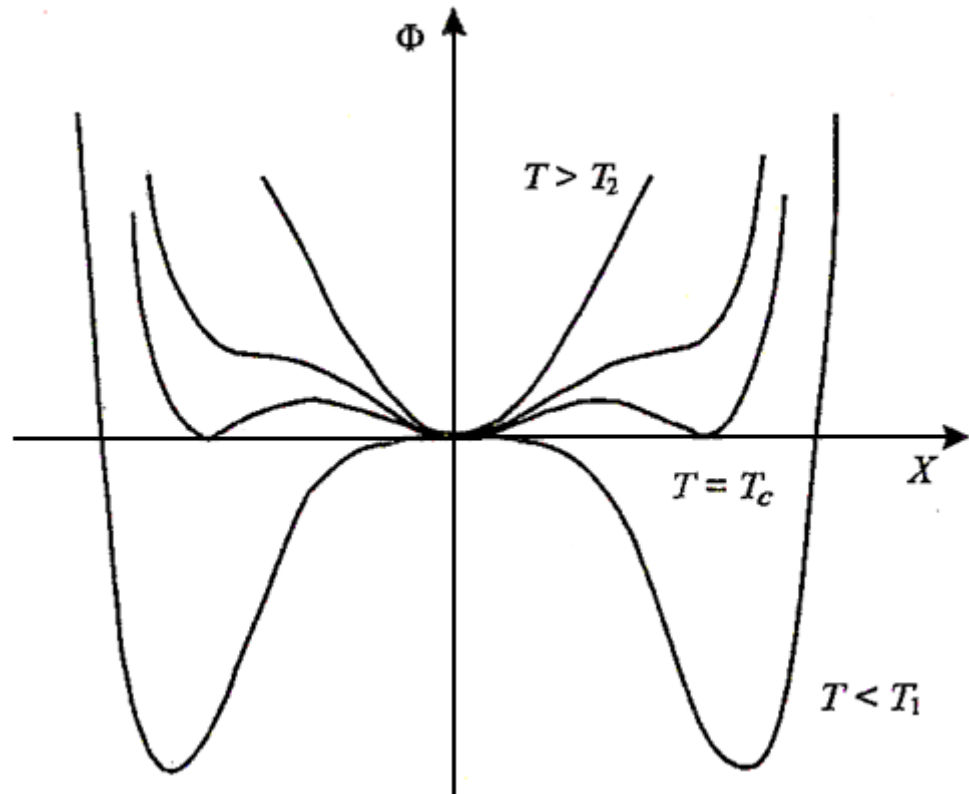


Рис. 7.4. Залежність термодинамічного потенціалу від параметра порядку при різних температурах

Автохвильові стани реалізуються в області температур  $T_1 < T < T_2$ . Розглянемо автохвилю, при проходженні якої параметр порядку змінюється від значення  $X = X^{(5)} = 0$  до  $X = X^{(1)}$ . Запишемо функцію  $f(X)$  (7.21) у вигляді

$$f(X) = cX \left( X^2 - X^{(1)^2} \right) \left( X^2 - X^{(2)^2} \right). \quad (7.25)$$

Розв'язок (7.3) при функції  $f(X)$ , заданої співвідношенням (7.25), визначаємо таким чином:

$$\frac{dX}{d\xi} = AX \left( X^2 - X^{(1)^2} \right). \quad (7.26)$$

Підстановкою (7.26) у (7.3) отримуємо значення швидкості авто хвилі

$$V = \frac{c}{A} \left( \frac{1}{3} X^{(1)^2} - X^{(2)^2} \right). \quad (7.27)$$

Інтегруючи рівняння (7.26) з граничними умовами  $X = 0$  при  $\xi \rightarrow -\infty$  і  $X = X^{(1)}$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , матимемо

$$X = \frac{X^{(1)}}{1 + \exp \left[ -2 \left( \frac{c}{3} \right)^{1/2} \xi \right]^{1/2}}. \quad (7.28)$$

Згідно з (7.27) при  $X^{(1)^2} = 3X^{(2)^2}$  значення швидкості дорівнює нулю. Температура, що задовольняє цій умові, є температурою фазового переходу  $T_c$ . В областях  $T < T_c$  і  $T > T_c$  напрямки руху автохвилі протилежні. При переході температурою точки  $T = T_c$  стабільна фаза стає метастабільною, і навпаки.

### 7.3. Біжучі імпульси

У біжучих імпульсах стан середовища до і після проходження імпульсу однаковий. Такі автохвильові процеси можливі в системах з числом динамічних змінних, що становить не менше двох. Характерна залежність динамічної змінної від координат для біжучого імпульсу зображена на рис.7.5.

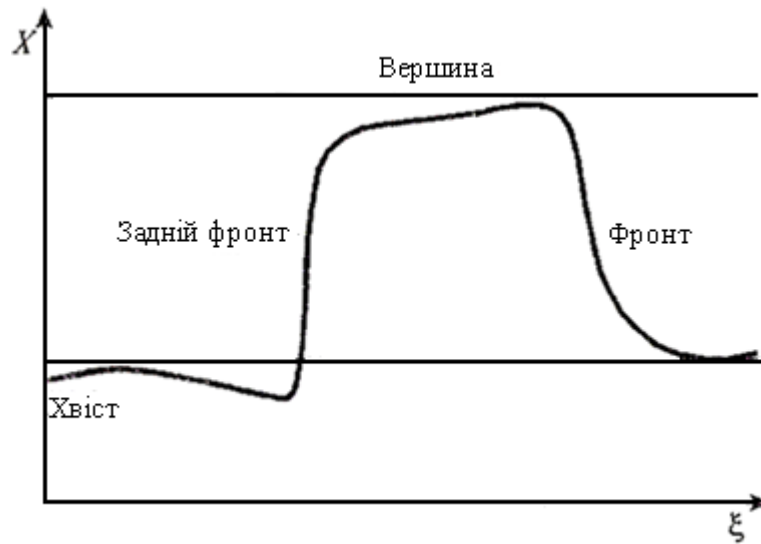


Рис. 7.5. Форма біжучого імпульсу

Імпульс складається з різкого фронту, різкого спадання і повільно залежних від координат вершини і хвоста. Імпульс можна уявити як два розглянутих у підрозділі 7.1 біжучих фронти, що мають однакові швидкості і в яких відбувається перемикання спочатку зі стану  $X^{(1)}$  у стан  $X^{(3)}$ , а потім зі стану  $X^{(3)}$  у стан  $X^{(1)}$ .

Для ілюстрації біжучого імпульсу розглянемо одновимірну систему з двома динамічними змінними, причому для однієї змінної (повільної) дифузією можна нехтувати. Тоді система рівнянь для двох динамічних змінних має вигляд

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial z^2} + f_1(X_1, X_2), \quad (7.29)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial t} = \varepsilon f_2(X_1, X_2), \quad (7.30)$$

де  $\varepsilon \ll 1$ .

У подальшому припустимо, що головні ізокліни  $f_1(X_1, X_2) = 0$  і  $f_2(X_1, X_2) = 0$  мають вигляд, зображений на рис. 7.6. Спочатку розглянемо випадок, коли головна нуль-ізокліна  $f(X_1, X_2)$  описується кривою 1.

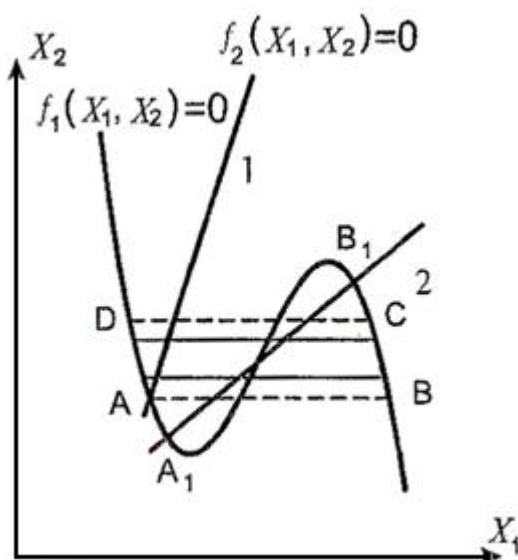


Рис. 7.6. Формування імпульсу

Згідно з рівнянням (7.30)  $X_2$  є повільною змінною, тому в областях різкого підйому та різкого спаду імпульсу залежністю її від аргументу можна нехтувати, тобто можна вважати, що ці частини імпульсу формуються при сталих значеннях  $X_2$ . У цьому разі визначення  $X_1$  у даних областях зводиться до розв'язку рівняння (7.29) при фіксованому значенні  $X_2$ . Проте розв'язки саме такої задачі досліджені у попередньому підрозділі для біжучих фронтів. Звідси, враховуючи отримані там результати, формування біжучого імпульсу можна уявити таким чином. У системі відбувається швидке перемикання стану з точки  $A$  в точку  $B$  при сталому значенні  $X_2$ . Цей процес визначає фронт імпульсу. Потім має місце повільний рух від точки  $B$  до точки  $C$ , при якому  $X_1$  визначається з умови  $f_1(X_1, X_2) \approx 0$ . Оскільки  $X_1$  повільно залежить від координат і часу, то задовольняється рівняння (7.29). Величина  $X_2$  визначається з рівняння  $\frac{dX_2}{dt} = \varepsilon f_2(X_1(X_2), X_2)$ . Ця ділянка формує вершину імпульсу. В точці  $C$  відбувається швидке перемикання стану в точку  $D$ , яке визначає спадання імпульсу, а потім реалізується повільний рух від точки  $D$  до точки  $A$ , при якому формується хвіст імпульсу. З прикладу, наведеному в попередньому підрозділі, ми знаємо, що швидкість автохвилі залежить від положення особливих точок  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ . Значення точок  $B$  і  $C$  пов'язані між собою умовою, яка потребує, щоб швидкість руху області зростання і області спадання імпульсу при переході системи з точки  $A$  у  $B$  і  $C$  у  $D$  були однакові. Якщо ці швидкості різні, то розв'язок не буде описувати імпульс. У розглянутому випадку фазова траєкторія виходить з особливої точки і входить в неї. Тому залежність динамічних змінних від координат складається з нескінченних ділянок до і після імпульсу, а також із самого імпульсу. Суцільна лінія на рис. 7.6 відповідає фазовій траєкторії, яка описує періодичну послідовність біжучих імпульсів. У цьому випадку фазова траєкторія не проходить через особливу точку.

Розглянуті вище приклади стосувалися системи, яка має одну стаціонарну точку. У випадку кривої 2 рис. 7.6 система має три особливі точки, причому дві з них  $B_1$  і  $A_2$  є стійкі. У такій системі можливі тригерні хвилі, в яких система переходить з однієї точки до іншої.

#### 7.4. Рух доменів у напівпровідниках

##### 7.4.1. Нестійкості в напівпровідниках

У напівпровідниках спостерігається велика різноманітність процесів самоорганізації [39], [109], [110], яка пов'язана з різноманітністю властивостей напівпровідників, значною кількістю типів квазічастинок, що беруть участь у процесах, а також із чутливістю напівпровідників до зовнішніх полів: електричних, магнітних, тиску тощо. Деякі процеси самоорганізації в напівпровідниках мають практичне застосування і тому інтенсивно досліджуються. Принципова схема спостереження нестійкостей в напівпровідниках містить зразок, джерело електрорушійної сили і опір навантаження, який дає можливість змінювати електричне поле всередині напівпровідника. При деяких критичних значеннях параметрів (напруги на

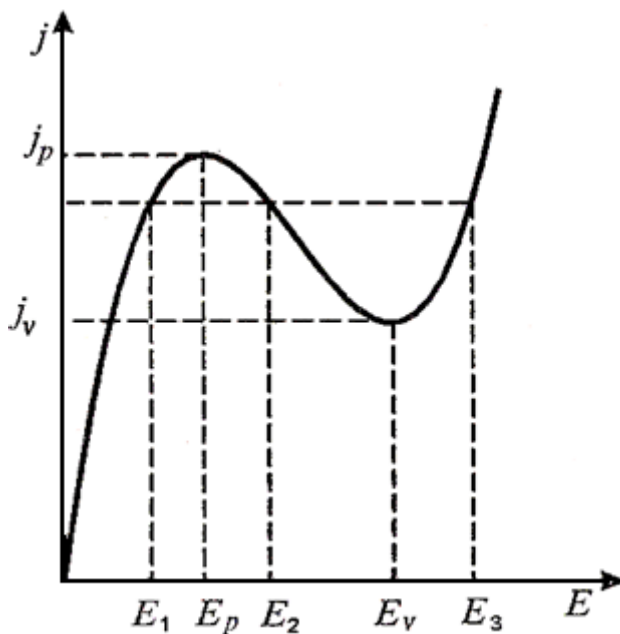


Рис. 7.7. Нелінійна вольт-амперна характеристика

зразку, температурі та ін.) відбувається різка зміна режиму – сили струму в колі, появи коливань тощо. При цьому в напівпровідниковому зразку виникають коливання, неоднорідний розподіл поля, автохвилі та інші явища. До утворення просторових, часових та просторово-часових структур у напівпровідниках часто призводить нелінійний зв'язок між густиною струму та напруженістю електричного поля. Типова нелінійна



залежність густини струму від напруженості зі спадаючою ділянкою (так звана характеристика  $N$ -типу) наведена на рис. 7.7. Для характеристики  $N$ -типу густина струму є неоднозначною функцією напруженості поля. В області значень  $j_v < j < j_p$  при заданому значенні густини струму система може знаходитись в одному з трьох значень напруженості. Крім того, в області  $E_p < E < E_v$  густина струму зменшується зі збільшенням напруги (електричного поля). Кажуть, що в цьому випадку система характеризується від'ємною диференційною провідністю

$$\sigma = \frac{dj}{dE} < 0. \quad (7.31)$$

Існують різноманітні механізми, які призводять до від'ємної диференційної провідності. Розглянемо нелінійність, яка пов'язана з особливостями енергетичного спектра деяких напівпровідників. На рис. 7.8 наведено спрощену модель будови енергетичних зон у деяких напівпровідниках (це має місце, наприклад, у кристалі  $GaAs$ ), яка приводить до появи від'ємної диференційної провідності. Залежність енергії електрона від імпульсу має два мінімуми: один глибокий і другий мілкий, який належить енергетичній зоні, розміщеній вище. Поведінка електрона з енергією, що знаходиться в області екстремуму, подібна до поведінки вільного електрона, що має іншу масу, яка називається ефективною.

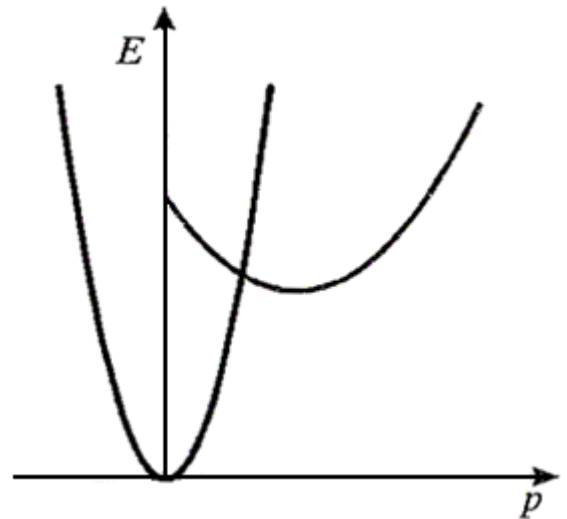


Рис. 7.8. Зони провідності в напівпровідниках

На рис.7.8 ефективна маса електрона, яка

$$\text{визначається формулою } m^* = \left( \frac{d^2 E}{dp^2} \right)^{-1}, \text{ є}$$

великою для електронів, що знаходяться в околі верхнього мінімуму (ці електрони називаються «важкими»), і є малою для електронів з енергією в

області біля низького мінімуму (ці електрони називаються «легкими»). При низьких температурах і слабких електричних полях практично всі електрони знаходяться в нижній зоні. У сильному електричному полі енергія електронів зростає і деяка частина їх переходить з нижньої зони у верхню. Оскільки ефективна маса електронів у верхній зоні більша, вони менш рухливі, їхній внесок у струм провідності менший, ніж внесок електронів нижньої зони. Тому із зростанням електричного поля внаслідок переходу частини електронів з нижньої зони у верхню струм спадає. Це приводить до вольт-амперної характеристики, зображеної на рис. 7.7.

Густину електричного струму, створеного електричним полем, можна представити у вигляді двох доданків

$$j = (\rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2) E, \quad (7.32)$$

де  $\rho_1, \rho_2, \mu_1, \mu_2$  – відповідно густини зарядів і рухливості електронів у верхній і нижній зонах. Запровадивши середню рухливість, можна записати

$$j = \rho \mu E, \quad (7.33)$$

де

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 + \rho_2, \\ \mu &= \frac{\rho_1 \mu_1 + \rho_2 \mu_2}{\rho}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

З (7.34) випливає, що при  $\mu_2 \ll \mu_1$  рухливість електронів зменшується із зростанням  $E$ , якщо  $\rho_2$  зростає з полем  $E$ , а  $\rho_1$  спадає. Таким чином, має місце від'ємна диференційна провідність, яка приводить, як ми побачимо далі, до нестійкостей.

Зазначимо, що залежність від поля розподілу зарядів, є наслідком нерівноважності системи. В умовах термодинамічної рівноваги імовірності прямих і обернених переходів підпорядковуються принципу детальної рівноваги і ступінь заселення рівнів визначається його статистичною вагою і положенням щодо рівня хімічного потенціалу. В нерівноважних умовах заселення рівнів

визначається імовірностями переходів між станами, що за певних умов може призводити до нестійкостей.

Від'ємну диференційну провідність можуть створювати також інші механізми: при перерозподілі носіїв заряду в напівпровідниках з домішковими рівнями, специфічною залежністю від енергії перерізу розсіяння зарядів та ін.

Перейдемо до кількісного розгляду появи нестійкостей в напівпровідниках з від'ємною диференційною провідністю. Схарактеризуємо напівпровідник густиною заряду  $\rho$ , густиною струму  $j$ , напруженістю поля  $E$ . Значення цих величин визначаються з рівнянь Максвелла і законів руху для частинок. У квазікласичному наближенні, при якому довжина хвилі електромагнітних хвиль набагато перевищує розміри зразка, рівняння Максвелла має вигляд

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (7.35)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} (\rho - \rho_0), \quad (7.36)$$

де  $\varepsilon$  – діелектрична проникність середовища;  $\rho_0$  – густина позитивного заряду. Вважаємо, що  $\rho_0$  не залежить від координат і часу. У рівняннях Максвелла також міститься закон збереження заряду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (7.37)$$

Зв'язок між струмом і електричним полем у загальному випадку неоднорідного розподілу заряду має вигляд

$$\mathbf{j} = \rho \mu(E) \mathbf{E} - D \vec{\nabla} \rho, \quad (7.38)$$

де  $D$  – коефіцієнт дифузії.

Проаналізуємо одновимірний випадок, коли  $E = E(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$ ,  $j = j(z)$ . Крім того, вважатимемо, що вектор напруженості електричного поля направлений вздовж осі  $OZ$ . Тоді в одновимірному випадку рівняння (7.35) задовольняється автоматично, а рівняння (7.36) – (7.38) набувають вигляду

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\rho - \rho_0), \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \mu(E) E - \frac{\partial}{\partial z} (\rho D) \right). \quad (7.40)$$

Система (7.39), (7.40) має однорідний розв'язок

$$\rho = \rho_0, \quad j = j_0 = \rho_0 \mu(E_0) E_0. \quad (7.41)$$

Значення  $j_0$  визначається напругою, яка прикладена до зразка. Розглянемо стійкість однорідного розв'язку. Для цього проаналізуємо поведінку малої флуктуації

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho, \\ E &= E_0 + \delta E. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Підстановка співвідношення (7.42) в рівняння (7.39), (7.40) приводить до системи рівнянь

$$\frac{\partial \delta E}{\partial z} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \delta\rho, \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial \delta E}{\partial z} + D \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial z^2} - \mu(E_0) E_0 \frac{\partial \delta\rho}{\partial z}, \quad (7.44)$$

де  $\sigma = \partial(\rho \mu(E) E) / \partial E$  – провідність кристала.

Поклавши  $\delta\rho = \delta\rho_0 \exp(ikz + p_k t)$ ,  $\delta E = \delta E_0 \exp(ikz + p_k t)$ , з (7.43) і (7.44) матимемо

$$\operatorname{Re} p_k = -k^2 D - \frac{4\pi}{\varepsilon} \sigma. \quad (7.45)$$

Наявність дифузії приводить до зменшення від'ємної частини  $p_k$ , отже, сприяє стабілізації однорідного стану. Флуктуації з великими значеннями  $k$  (короткохвильові) згасають швидше. Мінімальне значення  $k = k_{\min}$  за порядком величини дорівнює  $\pi/d$ , де  $d$  – розміри зразка. Для зразків великих розмірів  $d \rightarrow \infty$ ,  $k_{\min} \rightarrow 0$ . Оскільки за звичайних умов  $\sigma > 0$ , другий член в (7.45) також описує згасання флуктуацій. Проте в середовищі з від'ємною диференційною провідністю ( $\sigma < 0$ ) ситуація змінюється. При  $\sigma < 0$  і

$|\sigma| < \frac{\varepsilon k^2 D}{4\pi}$  величина  $\operatorname{Re} p_k$  є додатною і однорідний стан стає нестійким. Для товстих зразків, для яких виконується умова  $d \rightarrow \infty$ ,  $k_{\min} \rightarrow 0$ , це відбувається при  $\sigma < 0$ , тобто в області  $E_p < E < E_v$  вольт-амперної характеристики (див. рис. 7.7.)

#### 7.4.2. Ефект Ганна

Структури, що виникають за порогом стабільності, є різноманітними і залежать від граничних умов. Вони можуть бути часовими і просторовими. У напівпровідниках з від'ємною диференційною провідністю виникають неоднорідності в розподілі зарядів, поля; ці неоднорідності називають доменами. Домени можуть рухатись у кристалі, при цьому вони виникають поблизу одного електрода і зникають на іншому, що зумовлює коливання струму в напівпровіднику в сильних електричних полях. Ці коливання струму називаються ефектом Ганна. Ефект Ганна є прикладом дисипативної структури. Розглянемо якісну картину виникнення коливань струму.

Припустимо, що до зразка, який має від'ємну диференційну провідність, прикладене електричне поле з напруженістю  $E$ . При однорідному електричному полі густина заряду  $\rho$  і середня швидкість електронів  $V(E) = j/\rho = \mu(E)$  не залежать від координат. Нехай в системі виникла локальна флуктуація заряду, яка призвела до збільшення напруженості поля в деякій області. Для цього флуктуаційна частина заряду повинна бути такою, що в області флуктуації, ближчій до катоду, густина заряду більша, а в області, ближчій до аноду, густина заряду менша за середню густину. Згідно з вольт-амперною характеристикою рис. 7.7 при зростанні поля швидкість електронів у даній області (всередині флуктуації) спадає. Тому електрони в околі локальної флуктуації будуть накопичуватися в області, ближчій до катоду. Це, у свою чергу, призведе до збільшення поля всередині флуктуації. Таким чином, однорідний розподіл є нестійким стосовно виникнення неоднорідності. Оскільки до зразка прикладена постійна напруга, а в деякій частині зразка (в області

флуктуації) падіння напруги зросло, то в іншій частині напруженість поля повинна зменшуватися. Тобто зростання поля в області неоднорідності супроводжується його спаданням в інших областях. Зростання поля призупиниться, якщо швидкість переміщення неоднорідності вздовж зразка буде збігатися зі швидкістю дрейфового руху електронів. Внаслідок цього вздовж зразка буде переміщуватись неоднорідний шар заряду з переднім фронтом зі зменшеною концентрацією електронів і заднім зі збагаченою концентрацією електронів. Такий неоднорідний шар називається доменом. Домени виникають поблизу катода і зникають поблизу анода. Цей процес виникнення, руху і зникнення доменів періодично повторюється і спостерігається у вигляді періодичних коливань струму в напівпровіднику при накладанні постійного електричного поля, більшого за деяку величину. Ці періодичні коливання і називаються ефектом Ганна.

Структури, які виникають за порогом нестійкості, є різноманітними й залежать від початкових і граничних умов. При цьому можливі як часові, так і просторові структури. Розглянемо автохвильові розв'язки системи рівнянь (7.39), (7.40). Поклавши  $\xi = z - Vt$ , отримаємо

$$\frac{dE}{d\xi} = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\rho - \rho_0), \quad (7.46)$$

$$-V \frac{d\rho}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi} \left( \rho \mu(E) E - \frac{d}{d\xi} (D\rho) \right). \quad (7.47)$$

Проінтегрувавши (7.47) по  $\xi$ , матимемо

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{(\rho \mu(E) E - V) - C}{D}. \quad (7.48)$$

В області зовні неоднорідності  $\rho = \rho_0$ ,  $\rho_0 \mu(E_0) E_0 = j_0$ , тоді з (7.48) для сталої  $C$  маємо  $C = j_0 - \rho_0 V$ . Остаточне рівняння (7.48) переписується у вигляді

$$\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{(\rho \mu(E) E - V) - j_0 + \rho_0 V}{D}. \quad (7.49)$$

Рівняння (7.46) і (7.49) є системою двох диференціальних рівнянь першого порядку для визначення  $\rho(\xi)$  і  $E(\xi)$ . Для якісного аналізу розв'язків можна використати метод побудови фазових траєкторій поблизу особливих точок подібно до того, як це було зроблено в попередніх підрозділах. Особливі точки системи (7.46), (7.49) визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0, \\ \mu(E^{(s)})E^{(s)}\rho_0 &= j_0.\end{aligned}\quad (7.50)$$

Число і положення особливих точок визначаються вольт-амперною характеристикою. Для вольт-амперної характеристики (рис. 7. 7) при  $j < j_v$  й  $j > j_p$  існує одна особлива точка, при  $j_v < j < j_p$  – три особливі точки. Для вивчення поведінки розв'язку в околі  $s$ -ої особливої точки покладемо

$$\begin{aligned}E &= E^{(s)}(1 + x_1(\xi)), \\ \rho &= \rho_0(1 + x_2(\xi)).\end{aligned}\quad (7.51)$$

З (7.46) і (7.49) в лінійному по  $x_1$  та  $x_2$  наближенні маємо

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\xi} &= \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon E^{(s)}}x_2, \\ \frac{dx_2}{d\xi} &= \frac{\mu(E^{(s)})E^{(s)} - V}{D}x_2 + \frac{\sigma(E^{(s)})E^{(s)}}{\rho_0 D}x_1,\end{aligned}\quad (7.52)$$

де  $\sigma(E^{(s)})$  – диференціальна провідність. Поклавши  $x_1, x_2 \approx \exp(k\xi)$ , знайдемо

$$k_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu(E^{(s)})E^{(s)} - V}{D} \pm \sqrt{\frac{(\mu(E^{(s)})E^{(s)} - V)^2}{D^2} + \frac{16\pi\sigma}{\varepsilon D}} \right]. \quad (7.53)$$

Характер особливої точки визначається знаком величин  $\mu(E^{(s)})E^{(s)} - V$  і  $\sigma$ . При цьому нагадаємо, що досліджується не стійкість розв'язку в часі, а поведінка розв'язку в просторі. Тому знак дійсної частини  $k$  визначає не

стійкість у часі, а напрямок руху точки на фазовій траєкторії в околі особливої точки із зростанням  $\xi$  (тобто, рух відбувається в напрямку до особливої точки або проти неї).

З (7.53) випливає:

1. Якщо  $\sigma(E^{(s)}) > 0$  (точки  $E_1, E_3$  на рис. 7.7), то  $k_1 > 0, k_2 < 0$  і особлива точка є сідлом.

$$2. \text{Якщо } \sigma(E^{(s)}) < 0, \quad \left| \sigma(E^{(s)}) \right| < \frac{\varepsilon D}{16\pi} \left( \frac{\left( \mu(E^{(s)}) E^{(s)} - V \right)}{D} \right)^2, \quad \text{особлива}$$

точка є вузлом (точка  $E_2$  на рис. 7.7).

$$3. \text{Якщо } \sigma(E^{(s)}) < 0, \quad \left| \sigma(E^{(s)}) \right| > \frac{\varepsilon D}{16\pi} \left( \frac{\left( \mu(E^{(s)}) E^{(s)} - V \right)}{D} \right)^2, \quad \text{то особлива}$$

точка є фокусом.

З (7.46), (7.49) маємо рівняння для фазової траєкторії  $\rho(E)$  на площині  $(E, \rho)$

$$\frac{d\rho}{dE} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\rho \mu(E) E - V(\rho - \rho_0) - j_0}{D(\rho - \rho_0)} \quad (7.54)$$

Будемо вимагати обмеженості значень  $\rho$  і  $E$ . Тоді величина

$$\frac{1}{d} \int_0^d E d\xi = \bar{E}, \quad (7.55)$$

яка визначає середню напруженість у зразку, повинна бути скінченною при  $d \rightarrow \infty$ . Згідно з (7.46)

$$\int_0^d E d\xi = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{E dE}{\rho - \rho_0}. \quad (7.56)$$

Інтегрування у правій частині (7.56) проводиться вздовж фазової траєкторії. Якщо інтеграл не містить особливих точок, то його значення є



обмеженим. Проте згідно з (7.55) при  $d \rightarrow \infty$  він повинен бути розбіжним. Це значить, що розв'язок задачі описується інтегральною кривою, яка має як граничну принаймні одну особливу точку.

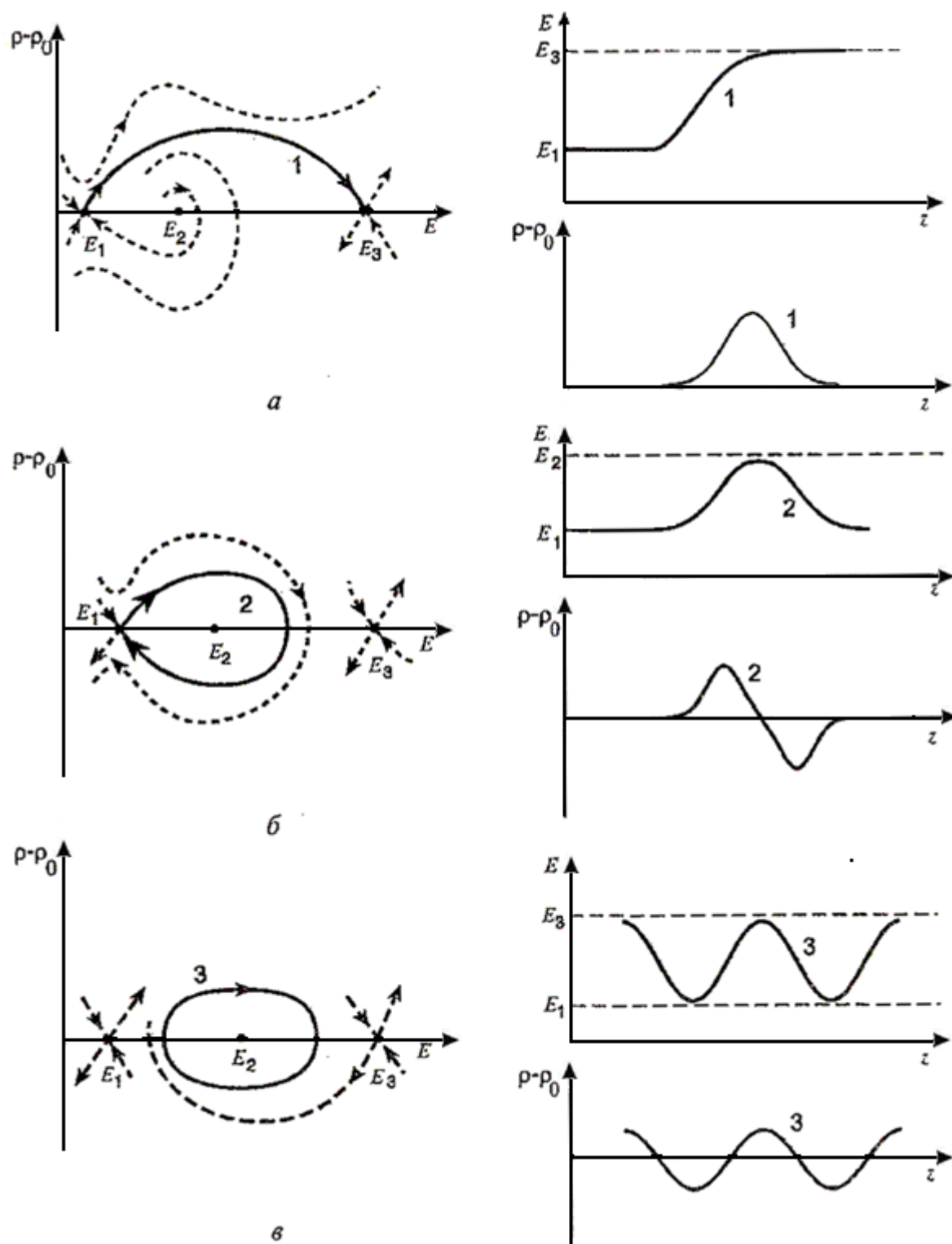


Рис. 7.9. Фазові траєкторії і залежність від координат напруженості електричного поля і густини заряду

Можливі фазові траєкторії та відповідні їм залежності  $E(\xi)$  і  $\rho(\xi) - \rho_0$  зображено на рис. 7.9. Замкнені траєкторії можливі лише в околі точки  $E_2$ . Різні траєкторії відповідають різним граничним умовам. Фазові траєкторії, що відповідають руху, при якому  $E(\xi)$  і  $\rho(\xi)$  є обмеженими величинами, наведені суцільною кривою. Цифрами 1,2,3 позначені криві, в яких  $E(\xi)$  і  $\rho(\xi) - \rho_0$  стосуються однакових траєкторій. Пунктирні лінії відповідають іншим можливим нефізичним траєкторіям, в яких ці величини є розбіжними. Проаналізуємо побудову залежностей  $\rho(\xi)$  і  $E(\xi)$ , наприклад на рис. 7.9, а. Фазова траєкторія виходить із сідлової точки  $E_1$  і входить у сідлову точку  $E_2$ . З рис. 7.9 видно, що вздовж напрямку траєкторії (вказаного стрілочкою) напруженість поля зростає, а густина заряду  $\rho - \rho_0$  спочатку зростає, а потім спадає. Це визначає залежності  $E(\xi)$  і  $\rho(\xi) - \rho_0$ , які представлені на рисунку.

Інтегрування нелінійних рівнянь (7.47), (7.49) показує, що повинна виконуватись умова  $V = j/\rho_0$ , тобто швидкість руху автохвилі повинна дорівнювати дрейфовій швидкості електронів в однорідному полі при заданому струмі. Цей результат якісно ми одержали раніше.

### 7.5. Поширення нервових імпульсів

Одним з видатних досягнень науки, здійснення якого вимагало залучення тонких біологічних, фізичних, хімічних, математичних методів досліджень, є пояснення процесів руху нервових імпульсів. Нервові імпульси поширюються в активному середовищі і є прикладом авто хвиль [111].

Нервова клітина (нейрон) складається з дендритів, які

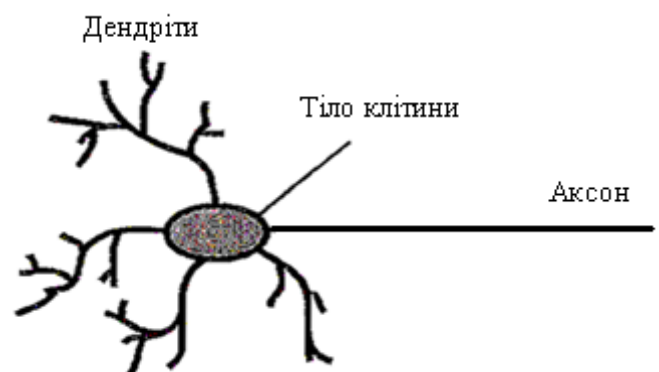


Рис. 7.10. Нервова клітина

сприймають сигнал від чутливих клітин, тіла клітини, всередині якої відбуваються процеси, що підтримують життєдіяльність клітини, і аксона, по якому передається імпульс. Розглянемо цю частину клітини. Аксон являє собою циліндр, оточений мембраною (рис. 7.10). Товщина мембрани є порядку 50–100 А. Для гігантського моторного аксона головоногих мембрана має такі параметри. У стані спокою напруга на мембрані становить 60–90 mV. При цьому потенціал внутрішньої частини є від'ємним, тобто внутрішня частина притягує позитивні іони. Розподіл іонів всередині і зовні мембрани не відповідає рівноважному стану для даної напруги. Так, відношення концентрацій іонів всередині аксона до концентрації іонів зовні аксона складає для натрію 1/9, для калію 40/1, для хлору 1/10. Ці співвідношення для іонів калію і хлору якісно узгоджуються з розподілом потенціалу: позитивні іони калію втягуються всередину, від'ємні виштовхуються назовні. Проте для натрію є деякий механізм, що створює лишок іонів зовні аксона.

Якщо напруга на мембрані знижується до 25 mV, провідність у мембрані різко зростає, відкриваються канали, що пропускають іони натрію. Потік іонів натрію всередину мембрани настільки сильний, що потенціал змінюється на протилежний. Тоді натрієві канали закриваються і відкриваються канали для іонів калію, які випускають ці іони. У подальшому відбуваються релаксаційні процеси, при яких іони рухаються в напрямку градієнта концентрацій, і в системі встановлюється вихідне значення різниці потенціалів. Механізм керування іонними каналами донині остаточно не з'ясований. Ходжкін і Хакслі виконали тонкі експерименти, які дали змогу описати властивості натрієвих і калієвих струмів у мембрані, та побудували феноменологічну модель руху нервового імпульсу. Розглянемо коротко модель руху імпульсу.

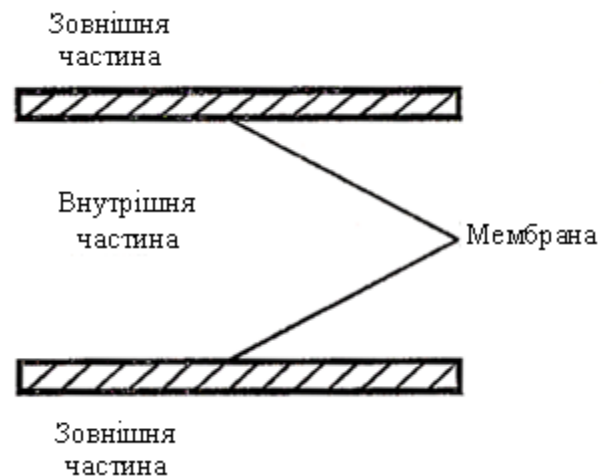


Рис. 7. 11. Схематичне зображення мембрани

Геометрія системи вказана на рис. 7.11. Мембрана являє собою циліндр, який розділяє внутрішню і зовнішню частину аксона. Щодо зв'язку між струмом і напругою зовнішня і внутрішня частини є лінійним середовищем, а мембрана має нелінійну диференційну провідність для компоненти струму, перпендикулярної до осі Циліндра. Будемо характеризувати мембрану ємністю і нехтувати індуктивністю мембрани. Цей результат є наслідком експериментальних вимірювань параметрів. Оскільки змінювання електричного поля при проходженні імпульсу відбувається досить повільно (електромагнітні хвилі з відповідними частотами, що характеризують імпульс, мають довжину хвилі, яка набагато перевищує розміри аксона), при дослідженні процесу поширення імпульсу використовується квазікласичне наближення. Тоді для аналізу поширення нервового імпульсу можна побудувати еквівалентну схему лінії передачі. Позначимо параметри систем всередині мембрани індексом 1, зовні мембрани – індексом 2. На рис. 7.12 зображені  $n$  і  $n+1$  ділянки цієї лінії. Відстань між точками  $n$  і  $n+1$  дорівнює  $a$ ;  $R_1$  і  $R_2$  опори ділянки між цими точками всередині і зовні мембрани;  $C$  – ємність;  $U_{1n}$  і  $U_{2n}$  – потенціали всередині і зовні мембрани. Струм  $i_n$  залежить від різниці потенціалів  $U_{2n} - U_{1n}$  за нелінійним законом. Внаслідок відсутності поздовжнього струму вздовж

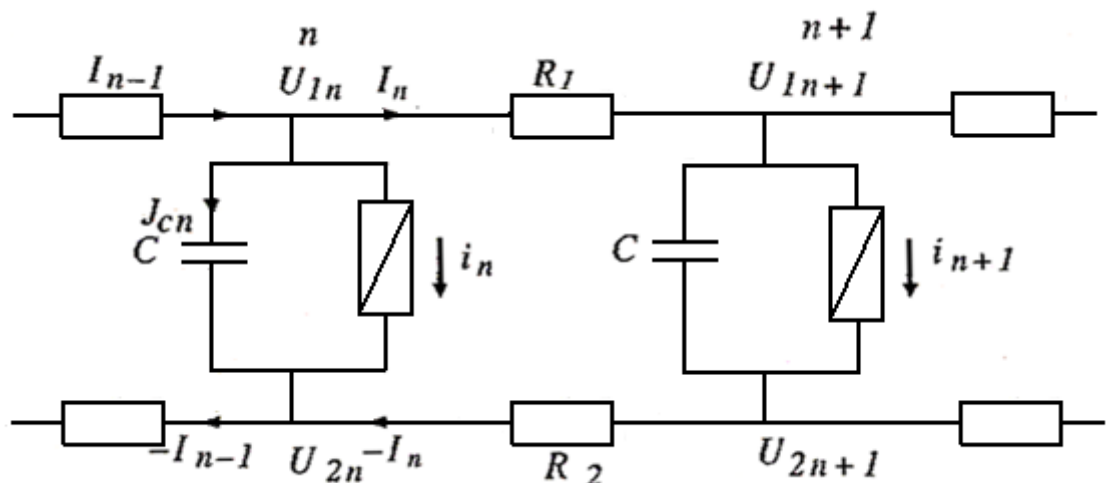


Рис. 7.12. Еквівалентне електричне коло для мембрани

мембрани через повний її переріз поздовжній струм всередині мембрани дорівнює за величиною і протилежний за напрямком поздовжньому струму

зовні мембрани. Завдання полягає у визначенні струмів і потенціалів усіх елементів лінії. Для розв'язку задачі використаємо закони Кірхгофа: 1) алгебраїчна сума струмів у кожному розгалуженому ланцюжку дорівнює нулю; 2) сума електрорушійних сил у деякому замкненому колі дорівнює сумі напруг на всіх елементах цього кола.

Падіння напруги на ємності  $n$ -ої ділянки дорівнює

$$\frac{Q_n}{C} = U(n), \quad (7.57)$$

де  $U(n) = U_{2n} - U_{1n}$ ;  $Q_n$  – заряд конденсатора.

Струм через конденсатор становить

$$I_{cn} = \frac{dQ_n}{dt} = C \frac{dU(n)}{dt}. \quad (7.58)$$

Застосування першого закону Кірхгофа в точці  $n$  дає можливість записати

$$I_{n-1} - I_n - I_{cn} - i_n = 0. \quad (7.59)$$

Застосування другого закону Кірхгофа до замкненого кола, яке містить елементи  $R_1, I_{cn+1}, R_2, I_{cn}$ , приводить до співвідношення

$$I_n (R_1 + R_2) + U(n+1) - U(n) = 0 \quad (7.60)$$

Перейдемо від дискретної до неперервної системи. При цьому покладемо  $z_n = na$ , де  $a$  – лінійні розміри окремого елемента (див. рис. 7.12). При граничному переході  $a \rightarrow 0$  усі величини дуже повільно змінюються зі зміною  $n$  і можна розкласти  $I_{n-1} = I(z_n - a)$  у ряд за степенями  $a$

$$I_{n-1} = I(z_n - a) = I(z_n) - \frac{\partial I(z_n)}{\partial z_n} a.$$

Величина  $z_n \equiv z$  стає неперервною і визначає положення досліджуваної точки вздовж аксона. Отже, з (7.60) дістанемо

$$I(z) = -\frac{a}{R_1 + R_2} \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (7.61)$$

З (7.59) випливає, що

$$-a \frac{\partial I(z)}{\partial z} - I_c(z) - \frac{i}{a} = 0. \quad (7.62)$$

Використавши (7.58), (7.61), (7.62), запишемо диференціальне рівняння для визначення розподілу потенціалу вздовж аксона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - cr \frac{\partial U}{\partial t} - rj(U) = 0, \quad (7.63)$$

де  $c = C/a$  – ємність одиниці довжини;  $r = (R_1 + R_2)/a$  – опір одиниці довжини,  $j = i/a$  – струм на одиницю довжини. Струм  $i$  залежить від різниці потенціалів.

Співвідношення (7.63) є основним для дослідження поширення збуджень вздовж аксона. Проте це є рівняння з однією динамічною змінною. Як випливає з досліджень, проведених у підрозділі 7.1, у системі з однією динамічною змінною можуть поширюватися лише біжучі фронти і не існують біжучі імпульси. Після проходження фронту система змінює свій стан і не підготовлена до проведення наступного імпульсу. Тому до рівняння (7.63) необхідно додати інші рівняння. У моделі Ходжкіна–Хакслі феноменологічне співвідношення для густини струму, що проходить через мембрану, представлено у вигляді кількох доданків, які описують натрієву, калієву компоненти, і струму втрат, тобто струм  $j$  залежить не тільки від  $V$ , а також від інших змінних, для визначення яких були задані рівняння, що впливали з досліду. Залежність струму від напруги є нелінійною, має спадаючу ділянку і описується характеристикою  $N$ -типу, подібною до представленої на рис. 7.7. Система характеризується чотирма динамічними змінними. Така система адекватно описує рух нервового імпульсу. Проте внаслідок великої кількості динамічних змінних рівняння є надзвичайно громіздкими і не дають змоги досліджувати процес аналітично. Для аналізу збуджених станів аксона корисним є наближення Фітц–Хью–Нагумо, в якому рівняння (7.63), що є головним, доповнене доданком, котрий описує релаксаційні процеси після проходження імпульсу, а також наведене рівняння для релаксаційного члена. Система рівнянь Фітц–Хью–Нагумо має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - cr \frac{\partial U}{\partial t} = rj(U) + R, \quad (7.64)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \varepsilon(U + a_1 - bR), \quad (7.65)$$

де  $j(U)$  – нелінійна функція аргументу, яка має вигляд залежності, представленої на рис. 7.7; функція  $R$  – описує струм, створений іонами;  $\varepsilon, a_1, b$  – сталі величини.

Розв'язки системи рівнянь (7.64), (7.65) у вигляді біжучих імпульсів проаналізовані в попередніх

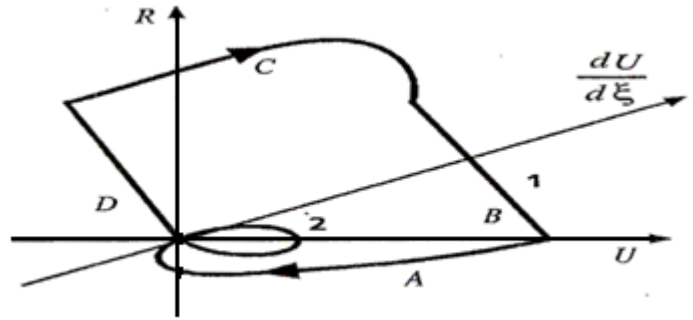


Рис. 7. 13. Фазові траєкторії, що характеризують поширення нервового імпульсу

підрозділах. Дослідження системи показує, що вона має

два розв'язки. Фазові траєкторії та форма імпульсу наведені в просторі змінних  $U, R, \partial U / \partial \xi$  (рис. 7.13, криві 1, 2). Крива 1 відповідає стійкому стану, крива 2 – нестійкому. Ділянка А відповідає фронту імпульсу, крива В – повільному рухові точки, що характеризує стан на фазовій траєкторії від точки  $R = 0$  до  $R'$  за умови  $rj(U) + R' = 0$ , крива С – швидкому зворотному переходу, ділянка D описує повільну релаксацію. Точка  $R'$  визначається з умови, яка потребує, щоб швидкості фронту і спаду імпульсу збігалися. Форма імпульсу має вигляд, наведений на рис. 7.5, де замість  $X$  треба покласти значення напруги  $U$ .

### 7.6. Автохвилі в багатовимірних системах

Дослідження автохвиль у двовимірних і тривимірних середовищах суттєво ускладнюється. Важливою є проблема збудження автохвиль. Періодично діюче джерело автохвиль називається ведучим центром або пейсмейкером – водієм ритму. У двовимірній системі (тонкому шарі рідини) в реакції Білоусова–Жаботинського спостерігалось спонтанне виникнення ведучих центрів. Хвилі збудження на поверхні серця створюються біологічним пейсмейкером – синусовим вузлом. Для хвиль в активних середовищах

спостерігається ефект синхронізації, який полягає в тому, що автохвилі, що мають більшу частоту, подавляють автохвилі з низькою частотою. У двовимірному середовищі внаслідок розриву плоскої хвилі можуть виникати спіральні хвилі, які можуть виникати також на неоднорідностях. У тривимірних середовищах при змиканні осі спіральної хвилі утворюються вихрові кільця.

### **7.7. Загальна теорія дисипативних структур у системах з двома змінними**

Широкий спектр нелінійних явищ з виникненням різноманітних неоднорідних в просторі і часі структур може бути описаний двома динамічними змінними. Кернер і Осіпов [112] провели детальне дослідження дисипативних структур, які описуються такими двома рівняннями:

$$\tau_1 \frac{\partial X_1}{\partial t} = l^2 \Delta X_1 - f_1(X_1, X_2, \lambda), \quad (7.66)$$

$$\tau_2 \frac{\partial X_2}{\partial t} = L^2 \Delta X_2 - f_2(X_1, X_2, \lambda), \quad (7.67)$$

з граничними умовами

$$n \vec{\nabla} X_1 \Big|_s = n \vec{\nabla} X_2 \Big|_s = 0, \quad (7.68)$$

де  $X_1$  і  $X_2$  – динамічні змінні;  $\tau_1, \tau_2, l, L$  – характерні часові та просторові константи системи,  $n$  – нормаль до межі розділу;  $f_1(X_1, X_2, \lambda)$  і  $f_2(X_1, X_2, \lambda)$  – нелінійні функції. У багатьох практично важливих випадках одна з величин (нехай це буде  $X_1$ ) має позитивний зворотний зв'язок (зростання величини  $X_1$  приводить до зростання швидкості приросту цієї величини), друга величина  $X_2$  пригноблює наростання  $X_1$ . Приклади ізоклін, які визначаються з умови

$$f_1(X_1, X_2, \lambda) = f_2(X_1, X_2, \lambda) = 0, \quad (7.69)$$

зображені на рис. 7.6.

Точки перетину ізоклін визначають особливі точки системи.  $\tau_1, \tau_2, l, L$  – визначають характерні величини часу і відстаней, на яких змінюються



величини  $X_1$  і  $X_2$ . Типи дисипативних структур визначаються значеннями безрозмірних параметрів  $\varepsilon = l/L, \alpha = \tau_1/\tau_2$ . Залежно від співвідношення між цими параметрами розрізняють три класи систем [112]:

К - системи, в яких  $\varepsilon \ll 1, \alpha > 1$

$\Omega$ -системи, в яких  $\varepsilon \geq 1, \alpha \ll 1$ ;

К $\Omega$  -системи, в яких  $\varepsilon \ll 1, \alpha \ll 1$ .

У К-системах величина  $X_2$  повільніше змінюється в просторі, ніж  $X_1$ , проте швидше змінюється з часом, у  $\Omega$ -системах, навпаки, у К $\Omega$ -системах  $X_2$  повільніше змінюється як в просторі, так і в часі.

В околі порогового значення  $\lambda$ , у К-системах утворюються статичні дисипативні структури, коливання і автохвилі в них не виникають. Властивості дисипативних структур залежать від вигляду ізоклін (рис. 7.6). Хвильове число, яке характеризує неоднорідну структуру, по порядку величини становить

$$k_0 \approx (lL)^{-1/2}. \quad (7.70)$$

У  $\Omega$ -системах виникають автоколивання, частота яких по порядку величини така:

$$\omega \approx (\tau_1 \tau_2)^{-1/2}. \quad (7.71)$$

У системах можуть поширюватись автохвилі, а статичні дисипативні структури не утворюються.

У К $\Omega$ -системах утворюються всі можливі різноманітні типи дисипативних структур: просторові, часові, просторово-часові.

Таким чином, числові значення параметрів  $\tau_1, \tau_2, l, L$ , вигляд залежностей  $f_1(X_1, X_2, \lambda)$  і  $f_2(X_1, X_2, \lambda)$ , положення зовнішнього параметра  $\lambda$  відносно критичного значення  $\lambda_c$  визначають вигляд можливих дисипативних структур, області їх існування і стійкості.